

Функции

Граница и непрекъснатост на функции

Функцията $f(x)$ има граница $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$,
при x клонящо към дадена (крайна) т. x_0 , когато
за всяко положително число ε съществува
положително число δ , такова че за всяко x , за
кото $|x - x_0| < \delta$, функцията $f(x)$ е дефинирана
и $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Тоест, когато за всяко x , което е в достатъчно
малък интервал около x_0 съответната стойност
на функцията $f(x)$ е достатъчно близо до L (в
малък интервал около L), функцията $f(x)$ има
граница L .

Функцията $f(x)$ има граница $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$,
при x клонящо към $+\infty$, когато за всяко
положително число ε съществува положително
число N , такова че за $x > N$ функцията $f(x)$ е
дефинирана и $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Граница на функция

Задача 1

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x^2 + 2x + 1}{x^2 - x + 5} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\cancel{x^2} \left(3 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} \right)}{\cancel{x^2} \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{5}{x^2} \right)} = 3$$

Рационална функция

При особеност $x \rightarrow \pm \infty$ изнасяме най-високата възможна степен, за да я съкратим.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 + 2x + 1}{x^2 - x + 5} = \frac{0 + 0 + 1}{0 - 0 + 5} = \frac{1}{5}$$

При $x \rightarrow 0$, тук няма особеност.

Задача 2

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^4 + 2x^2 - x + 3}{x^7 - x^3 + 5x + 1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^4 \left(1 + \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^3} + \frac{3}{x^4} \right)}{x^7 \left(1 - \frac{1}{x^4} + \frac{5}{x^6} + \frac{1}{x^7} \right)} = 0$$

Задача 3

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^4 - 5x + 2}{3x - 1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^4 \left(1 - \frac{5}{x^3} + \frac{2}{x^4} \right)}{x \left(3 - \frac{1}{x} \right)} = (\pm\infty)^3 = \pm\infty$$

Задача 4

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{3x^3}{9x^2 - 4} - \frac{x^2}{3x + 2} \right) = [\infty - \infty] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x^3 - 3x^3 + 2x^2}{9x^2 - 4} = \frac{2}{9}$$

Задача 5

Ирационална функция

- Рационализираме особеността с формулата

$$(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\sqrt{4x^2 - 1} - \sqrt{4x^2 + x} \right) = [\infty - \infty] =$$

$$\boxed{A - B}$$

$$\boxed{A + B}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\sqrt{4x^2 - 1} - \sqrt{4x^2 + x} \right) \frac{\sqrt{4x^2 - 1} + \sqrt{4x^2 + x}}{\sqrt{4x^2 - 1} + \sqrt{4x^2 + x}} =$$

$$\boxed{A + B}$$

$$\boxed{A^2 - B^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\cancel{4x^2} - 1 - \cancel{4x^2} - x}{|x| \left(\sqrt{4 - \frac{1}{x^2}} + \sqrt{4 + \frac{1}{x}} \right)} = - \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x+1}{|x|4} = \begin{cases} - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{4x} = -\frac{1}{4} \\ - \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{-4x} = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Задача 6

$$\lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{x^2}{4} - 4x + \frac{4}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{x^2}{4} \right) - \lim_{x \rightarrow -2} (4x) + \lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{4}{x} \right) =$$
$$1 + 8 - 2 = 7$$

Тук няма особеност, замества се директно граничната точка (-2).

Задача 7

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{x^2 - 2x - 3} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\cancel{(x-3)} (x^2 + 3x + 9)}{\cancel{(x-3)} (x+1)} = \frac{27}{4}$$

При $x=3$ знаменателят става 0, т.е. особеността е $(x-3)$, която изваждаме като множител, за да я съкратим.

Задача 8

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 5x^2 + 4}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 - 1) \cancel{(x^2 - 4)}}{\cancel{x^2 - 4}} = \frac{4 - 1}{1} = 3$$

Задача 9

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\ln(x+3) - \ln \sqrt{x^2+5} \right) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\ln \frac{x+3}{\sqrt{x^2+5}} \right) = \\ &= \ln \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+3}{\sqrt{x^2+5}} \right) = \ln \left(\frac{\cancel{x} \left(1 + \frac{3}{x} \right)}{\cancel{x} \sqrt{1 + \frac{5}{x^2}}} \right) = \ln 1 = 0\end{aligned}$$

Основни еквивалентности

$$\sin x \sim x, \quad x \rightarrow 0$$

$$\arcsin x \sim x, \quad x \rightarrow 0$$

$$\operatorname{tg} x \sim x, \quad x \rightarrow 0$$

$$\operatorname{arctg} x \sim x, \quad x \rightarrow 0$$

$$e^x - 1 \sim x, \quad x \rightarrow 0$$

$$(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x, \quad x \rightarrow 0, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\ln(1+x) \sim x, \quad x \rightarrow 0$$

$$\ln t \sim t-1, \quad t \rightarrow 1$$

$$1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}, \quad x \rightarrow 0$$

$$P_n \sim a_0 x^n, \quad x \rightarrow \pm\infty$$

$$P_n \sim a_n, \quad x \rightarrow 0 \quad \left(P_n \sim a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n \right)$$

Основни граници

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^x = e^k$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Задача 10

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{5x} \cdot 5 = 5$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{5x} = 1$$

Задача 11

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x-3}{x-2} \right)^{2x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x \left(1 - \frac{3}{x} \right)}{x \left(1 + \frac{2}{x} \right)} \right)^{2x+1} =$$

$$= \frac{(e^{-3})^2}{(e^2)^2} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(1 - \frac{3}{x} \right)}{\left(1 + \frac{2}{x} \right)} = \frac{e^{-6}}{e^4} = e^{-10}$$

Задача 12

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2} (1 + \cos x)^{\frac{2}{\cos x}} = \lim_{x \rightarrow \pi/2} (1 + \cos x)^{\frac{1}{\cos x} \cdot 2} = e^2$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2} (1 + \cos x)^{\frac{1}{\cos x}} = e$$

Задача 13

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 x/2}{\frac{x^2}{4}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \left(\frac{\sin x/2}{x/2} \right)^2 = \frac{1}{2}$$

$$1 - \cos x = 2 \sin^2 x/2$$

Задача 14

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x^2)}{x \sin 5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x \cdot 5x} = \frac{1}{5}$$

$$\ln(1 + x^2) \sim x^2, \quad x \rightarrow 0$$

$$\sin 5x \sim 5x, \quad x \rightarrow 0$$

Задача 15

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \cotg x = \lim_{x \rightarrow 0} x \frac{\cos x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} \cos x =$$

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\cos 0^\circ = 1$$

Задача 16

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tg x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x (1 - \cos x)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{2x^3} = \frac{1}{2}$$

$$1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}, \quad x \rightarrow 0$$

Непрекъснатост на функции

def: $f(x)$ – непрекъсната в т. $x_0 \in \mathcal{D}$, ако

1) $f(x)$ е дефинирана в интервала $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, където $\varepsilon > 0$.

2) $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

3) $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

def: $f(x)$ – непрекъсната отляво на т. x_0 , ако $\exists$

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = f(x_0)$$

def: $f(x)$ – непрекъсната отдясно на т. x_0 , ако $\exists$

$$\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = f(x_0)$$

Теорема: Ако $f(x)$ е непрекъснатата отляво и отдясно на т. $x_0 \in \mathbb{D}$, $f(x)$ е непрекъснатата в т. x_0 .

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = f(x_0) \\ \Rightarrow f(x) \text{ непрекъснатата в точка } x_0$$

def: $f(x)$ – непрекъснатата отляво на т. x_0 , ако $\exists$

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = f(x_0)$$

def: $f(x)$ – непрекъснатата отдясно на т. x_0 , ако $\exists$

$$\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = f(x_0)$$

Теорема: Всяка елементарна функция е непрекъсната в дефиниционната си област.

def: $f(x)$ – елементарни функции са всички функции, които се получават от основните ЕФ чрез $\pm, \cdot, : , \circ$ (композиция).

def: ОЕФ – $x^\alpha, a^x, \log_a x, \sin x, \cos x, \arcsin x, \arccos x$.

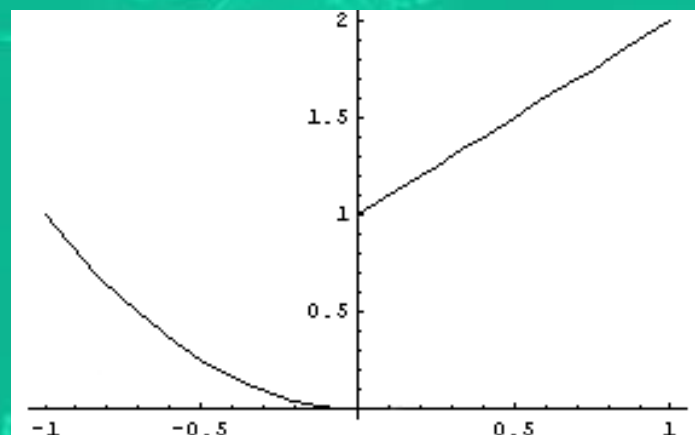
Видове точки на прекъсване:

- 1) Точки на прекъсване от I род – ако $\exists$ крайни, различни лява и дясна граници
$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x).$$
- 2) Точки на прекъсване от II род – ако поне една от $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x)$ или $\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x)$ е ∞ или $\nexists$.
- 3) Отстранима точка на прекъсване, ако
$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) \neq f(x_0)$$
или $f(x)$ не е определена в точката x_0 .

Задача 17

Да се изследва за непрекъснатост функцията и да се начертае графиката.

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & -1 \leq x < 0 \\ x+1, & 0 < x \leq 1. \end{cases}$$



Решение:

при $-1 \leq x < 0$, $f(x) = x^2$ – непрек.ЕФ

при $0 < x \leq 1$, $f(x) = x+1$ – непрек.ЕФ

при $x = 0$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -0} x^2 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +0} (x+1) = 1 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{точка } x = 0 \text{ е точка на} \\ &\text{прекъсване от I род.} \end{aligned}$$

Задача 18

Да се изследва за непрекъснатост функцията:

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Решение:

при $x \neq 0$, $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ – непрек.ЕФ

при $x = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x} \Rightarrow \nexists \Rightarrow$

точка $x = 0$ е точка на прекъсване от II род.

$$\nexists \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sin x, \quad \nexists \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \cos x$$

Задача 19

Да се намери стойността на a , така че $f(x)$ да е непрекъсната за всяко x .

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 3x}{x}, & x \neq 0 \\ a, & x = 0. \end{cases}$$

Решение:

при $x \neq 0$, $f(x) = \frac{\sin 3x}{x}$ – непрек.ЕФ

Стойността на a трябва да е равна на границата

$$a = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x} = 3$$

$$\sin 3x \sim 3x, \quad x \rightarrow 0$$

Задача 20

Да се намери стойността на a , така че $f(x)$ да е непрекъсната за всяко x .

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x \sin 2x}{(\operatorname{arctg} 3x)^2}, & x \neq 0 \\ a, & x = 0. \end{cases}$$

Решение:

при $x \neq 0$, $f(x) = \frac{x \sin 2x}{(\operatorname{arctg} 3x)^2}$ — непрек.ЕФ

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin 2x}{(\operatorname{arctg} 3x)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2}{9x^2} = \frac{2}{9} \Rightarrow a = \frac{2}{9}$$

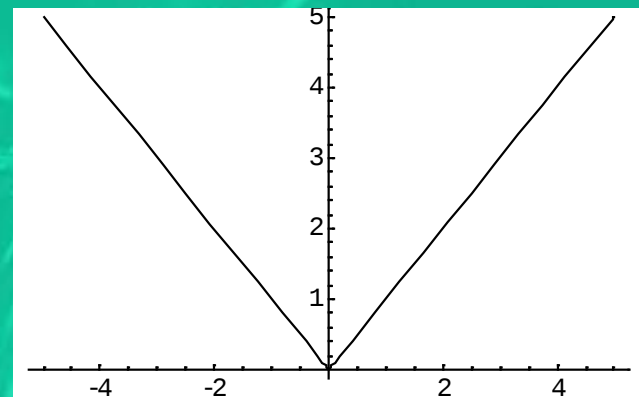
$$\sin 2x \sim 2x, \quad x \rightarrow 0$$

$$\operatorname{arctg} 3x \sim 3x, \quad x \rightarrow 0$$

Задача 21

Да се изследва за непрекъснатост функцията:

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, & x > 0 \rightarrow \text{непрекъ. ЕФ} \\ 0, & x = 0 \\ -x, & x < 0 \rightarrow \text{непрекъ. ЕФ} \end{cases}$$



Решение:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -0} |x| = \lim_{x \rightarrow -0} (-x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +0} |x| = \lim_{x \rightarrow +0} x = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow -0} f(x) = \lim_{x \rightarrow +0} f(x) = f(0) = 0$$

$\Rightarrow f(x)$ е непрекъсната в точка $x = 0$

$\Rightarrow f(x)$ е непрекъсната за всяко x .

Задача 22

Да се намери стойността на a , така че $f(x)$ да е непрекъсната за всяко x .

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos x}{|x|}, & x \neq 0 \\ a, & x = 0. \end{cases} \rightarrow \text{непрек. } \mathbb{R} \setminus \emptyset$$

Решение:

при $x = 0$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -0} \frac{1 - \cos x}{|x|} &= \lim_{x \rightarrow -0} \frac{1 - \cos x}{-x} = \lim_{x \rightarrow -0} \frac{x^2}{2} \frac{1}{-x} = \lim_{x \rightarrow -0} \left(-\frac{x}{2} \right) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +0} \frac{1 - \cos x}{|x|} &= \lim_{x \rightarrow +0} \frac{1 - \cos x}{x} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{x^2}{2} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow +0} \left(\frac{x}{2} \right) = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$a = 0$, за да бъде $f(x)$ непрекъсната за всяко x .

$$1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}, \quad x \rightarrow 0$$

Изчисление с Mathematica

Чрез функцията $\text{Limit}[f, x \rightarrow \text{Infinity}]$ се пресмята символично границата на функцията f , когато x клони към безкрайност.

Чрез функцията $\text{Limit}[f, x \rightarrow -\text{Infinity}]$ се пресмята символично границата на функцията f , когато x клони към минус безкрайност.

Чрез функцията $\text{Limit}[f, x \rightarrow a]$ се пресмята символично границата на функцията f , когато x клони към a .

$\text{Plot}[f[x], \{x, a, b\}]$ - рисува графиката на функцията, описана с израза f за независима променлива x в интервала $[a; b]$.

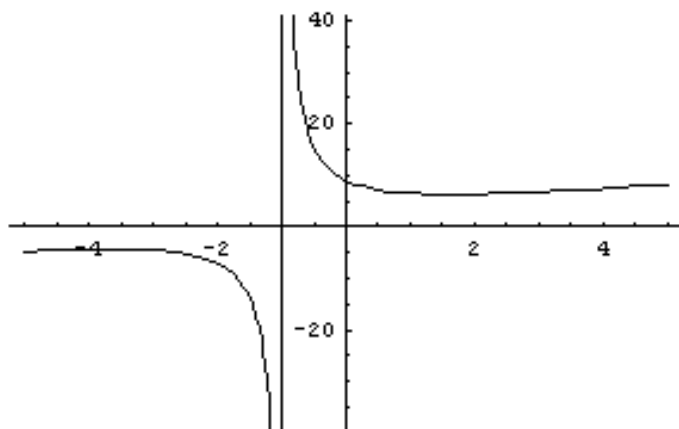
Задача: Да се намери границата на
функцията $f(x) = \frac{x^3 - 27}{x^2 - 2x - 3}$ при x клонящо
към 3.

```
f :=  $\frac{x^3 - 27}{x^2 - 2x - 3}$  ;
```

```
Limit[f, x → 3.]
```

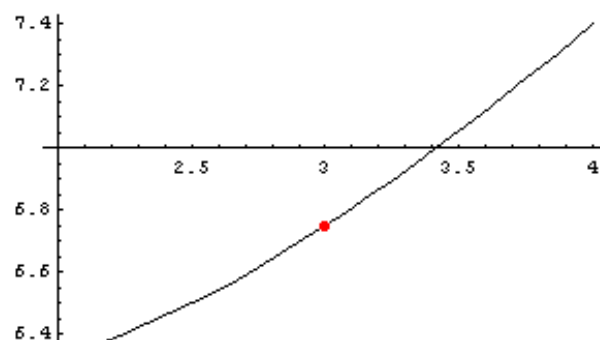
6.75

```
Plot[f, {x, -5, 5}]
```



- Graphics -

```
Plot[f, {x, 2, 4}, Epilog → {Red, PointSize[.02], Point[{3, 6.75}]}]
```



- Graphics -